Chap 5

微分方程

Chap 5 － 1

微分方程基本概念

■ 例子

➢ Malthus 模型

物种个体总数 — $P(x)$

单位时间个体增长率— r

从 $t \to t + \Delta t$, $\dfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = rP(t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = rP \quad \longleftarrow$$

含未知函数一阶导数

称为一阶微分方程

假画的鉴定问题

二战结束时，Meegeren 因将名画卖给纳粹头目Goering 受审， Meegeren辩称那些画是他自己所作假，其中包括绘画大师Vermeer的“基督与长老”，这画的鉴定直至1960年代才解决

画颜料中含有放射性物质 m（例如C-14）

$$\frac{dm}{dt} = -rm$$

（r –衰减常数）

r =ln2/半衰期，分析C-14衰变量的比例确定年代

➢ 核废料的处理

美国原子能委员会曾将密封着核废料的园桶扔到深海底，环保者提出质问：安全否?实验表明速度达12. 2m/sec时圆桶可能破裂.

海面下水深度 $y(t)$, 海水密度D－1026kg/m^3

桶重W —249kg, 体积V—0. 208m^3, 阻力系数k＝0. 12

浮力$B = VD$=213.41kg

依Newton第二定律

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = W - B - k\frac{dy}{dt}$$

二阶微分方程

■ 概念

- 一般形式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \quad \boxed{n \text{ 阶微分方程}}$$

（x为自变量， y为函数）

- 相关概念

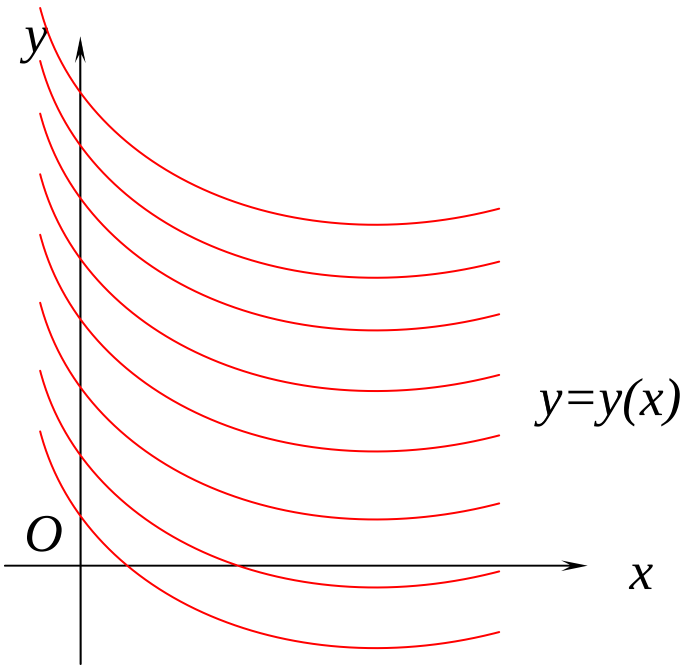
方程的阶　方程的解：通解，特解

定解条件　初始条件，边界条件

定解问题：方程 + 定解条件

■ 解的几何意义

微分方程的一个特解 $y = y(x)$ 在坐标平面上对应一条曲线，称为**积分曲线**，而方程的通解在平面上则对应一族曲线，称为**积分曲线族**



Chap 5 — 2

可分离变量方程

■ 可分离变量方程

- 形式 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y)$
- 解法

化为 $\dfrac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx$ 后两边积分

注意 使 $\psi(y)=0$ 的常数 $y=c$ 也是方程的解

例 求解下列方程

(1) $y'=x\sqrt{1-y^2}$

$$(2)\quad \frac{dP}{dt} = rP$$

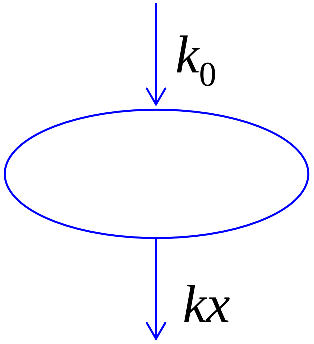
- 一般地，若

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y$$

$$\Rightarrow \quad y = ce^{\int p(x)dx}$$

这里 $\int p(x)dx$ 表示 $p(x)$ 的一个原函数

例　静脉滴注时，药物以速率k_0注入，以与药量成正比(比率k)的速率消除，求到时刻t体内药量$x(t)$



$$\frac{dx}{dt}=k_0-kx$$

- 一阶齐次方程

➢ 形式

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

➢ 解法　　设 $u=\dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y'=u+xu'$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$$

可分离变量

例　求解方程

$$xy'=y+2\sqrt{xy} \qquad (x>0)$$

例　求解方程的定解问题

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}, \qquad y\big|_{x=1}=2$$

Chap 5 — 3

一阶线性微分方程

一阶线性方程

- 形式 $y' + P(x)y = Q(x)$

非齐次项

- 解法 常数变易法

先考虑特殊情况 $Q=0$时的解，再在通解中将常数变换成待定函数

- 公式

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right)}$$

$\int P(x)dx$表示一个原函数

例　求解下列方程

(1) $(x+1)y' - \alpha y = e^x (x+1)^{\alpha+1}$

(2) $y' = \dfrac{y}{2x - y^2}$

例 求满足以下条件的连续函数 $f(x)$：

(1) $\int_0^x tf(t)dt = f(x) + x^2$

(2) $\int_0^1 f(ux)du = \dfrac{1}{2} f(x) + 1$

■ Bernoulli方程

- 形式 $y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1)$
- 解法　代换 $z = y^{1-n}$

$$\Rightarrow \quad z' + (1-n)Pz = (1-n)Q \qquad \boxed{\text{线性方程}}$$

例　求解方程

$$y' - \frac{6y}{x} + xy^2 = 0$$

H.W

习题 5

2 (1) (4) (5) (6) (8)−(12)

3 (1) (2) (3） (5)

4 (1) (3) (5) (6) (7) (9) (11) (12)

Chap 5 － 4

可降阶的高阶微分方程

■ $y^{(n)} = f(x)$ 型方程

➢ 解法　积分一次，就降阶一次

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1$$

逐次积分就可以求出通解

例　求解方程 $y^{(3)} = 30x + \sin x$

■ $y'' = f(x, y')$ 型方程（缺y 型）

➢ 解法

设 $y' = p \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$

例　求解方程 $xy'' + y' = 4x$

- $y'' = f(y, y')$ （缺x 型）

➢ 解法　设 $y' = p$

$$\Rightarrow \quad p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

注意以y为自变量

例　求解方程

(1) $2yy'' = y'^2 + 1$

(2) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$

H.W

习题5

5 (1) (3) (4) (5) (6) (7)